Донецкий Национальный Технический Университет

Лабораторная работа № 2

**«**Решение задач линейного программирования симплекс-методом**»**

Выполнил:

Лысенко А. С.

Проверила:

Скрипник Т.В.

Покровск 2016

**Симплекс-метод**.  
Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.  
Поскольку в правой части присутствуют отрицательные значения, умножим соответствующие строки на (-1).  
Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 7x1+x2 при следующих условиях-ограничений.  
7x1-7x2≤10  
4x1+2x2≥30  
-5x1+6x2≤6  
Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).  
В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x3. В 2-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x4 со знаком минус. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x5.   
7x1-7x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 = 10  
4x1 + 2x2 + 0x3-1x4 + 0x5 = 30  
-5x1 + 6x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 = 6  
Введем **искусственные переменные x**: в 2-м равенстве вводим переменную x6;   
7x1-7x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 = 10  
4x1 + 2x2 + 0x3-1x4 + 0x5 + 1x6 = 30  
-5x1 + 6x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 + 0x6 = 6  
Для постановки задачи на максимум целевую функцию запишем так:  
F(X) = 7x1+x2 - Mx6 → max  
За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной М, очень большое положительное число, которое обычно не задается.  
Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.  
Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.  
Из уравнений выражаем искусственные переменные:  
x6 = 30-4x1-2x2+x4  
которые подставим в целевую функцию:  
F(X) = 7x1 + x2 - M(30-4x1-2x2+x4) → max  
или  
F(X) = (7+4M)x1+(1+2M)x2+(-M)x4+(-30M) → max  
Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| -5 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |

A =

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.  
**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.  
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x6, x5  
Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:  
X0 = (0,0,10,0,6,30)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 10 | 7 | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 30 | 4 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| x5 | 6 | -5 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F(x0) | -30M | -7-4М | -1-2М | 0 | M | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.  
**Итерация №0**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1  
и из них выберем наименьшее:  
min (10 : 7 , 30 : 4 , - ) = 13/7  
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (7) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x3 | 10 | **7** | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 13/7 |
| x6 | 30 | 4 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 71/2 |
| x5 | 6 | -5 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| F(x1) | -30M | **-7-4М** | -1-2М | 0 | M | 0 | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x3 в план 1 войдет переменная x1.  
Строка, соответствующая переменной x1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x3 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=7. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x1 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x1 и столбец x1. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.  
НЭ = СTЭ - (А\*В)/РЭ  
СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (7), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 10 : 7 | 7 : 7 | -7 : 7 | 1 : 7 | 0 : 7 | 0 : 7 | 0 : 7 |
| 30 - (10 \* 4) : 7 | 4- (7 \* 4) : 7 | 2 - (-7\*4):7 | 0 -(1\*4):7 | -1-(0\*4):7 | 0- (0\*4):7 | 1 -(0\*4):7 |
| 6 - (10 \* (-5)) : 7 | -5 -(7\*(-5):7 | 6 -(-7 \* -5):7 | 0 - (1\*(-5):7 | 0-(0\*(-5):7 | 1 -(0\*(-5)):7 | 1-(0\*(-5)):7 |
| 0 - (10 \* (- 7- 4M)) : 7 | (-7-4М)-(7\*(-7-4M)):7 | (-1-2М)-(-7\*(-7-4M)):7 | (-1-2M)-(-7\*(-7-4M)):7 | (M)-(0\*(-7-4M)):7 | (0)-(0\*(-7-4M)):7 | (0)-(0\*(-7-4M)):7 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 13/7 | 1 | -1 | 1/7 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 242/7 | 0 | 6 | -4/7 | -1 | 0 | 1 |
| x5 | 131/7 | 0 | 1 | 5/7 | 0 | 1 | 0 |
| F(X1) | 10-242/7M | 0 | -8-6M | 1+4/7M | M | 0 | 0 |

**Итерация №1**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2  
и из них выберем наименьшее:  
min (- , 242/7 : 6 , 131/7 : 1 ) = 41/21  
Следовательно, 2-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x1 | 13/7 | 1 | -1 | 1/7 | 0 | 0 | 0 | - |
| x6 | 242/7 | 0 | **6** | -4/7 | -1 | 0 | 1 | **41/21** |
| x5 | 131/7 | 0 | 1 | 5/7 | 0 | 1 | 0 | 131/7 |
| F(X2) | 10-242/7M | 0 | **-8-6M** | 1+4/7M | M | 0 | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x6 в план 2 войдет переменная x2.  
Строка, соответствующая переменной x2 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x6 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=6. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x2 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x2 и столбец x2. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 13/7-(242/7 • -1):6 | 1-(0 • -1):6 | -1-(6 • -1):6 | 1/7-(-4/7 • -1):6 | 0-(-1 • -1):6 | 0-(0 • -1):6 | 0-(1 • -1):6 |
| 242/7 : 6 | 0 : 6 | 6 : 6 | -4/7 : 6 | -1 : 6 | 0 : 6 | 1 : 6 |
| 131/7-(242/7• 1):6 | 0-(0 • 1):6 | 1-(6 • 1):6 | 5/7-(-4/7 • 1):6 | 0-(-1 • 1):6 | 1-(0 • 1):6 | 0-(1 • 1):6 |
| (0)-(242/7 • (-8-6M)):6 | (0)-(0 • (-8-6M)):6 | (-8-6M)-(6 • (-8-6M)):6 | (1+4/7M)-(-4/7 • (-8-6M)):6 | (M)-(-1 • (-8-6M)):6 | (0)-(0 • (-8-6M)):6 | (0)-(1 • (-8-6M)):6 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 510/21 | 1 | 0 | 1/21 | -1/6 | 0 | 1/6 |
| x2 | 41/21 | 0 | 1 | -2/21 | -1/6 | 0 | 1/6 |
| x5 | 92/21 | 0 | 0 | 17/21 | 1/6 | 1 | -1/6 |
| F(X2) | 428/21 | 0 | 0 | 5/21 | -11/3 | 0 | 11/3+M |

**Итерация №2**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x4, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4  
и из них выберем наименьшее:  
min (- , - , 92/21 : 1/6 ) = 544/7  
Следовательно, 3-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (1/6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x1 | 510/21 | 1 | 0 | 1/21 | -1/6 | 0 | 1/6 | - |
| x2 | 41/21 | 0 | 1 | -2/21 | -1/6 | 0 | 1/6 | - |
| x5 | 92/21 | 0 | 0 | 17/21 | **1/6** | 1 | -1/6 | **544/7** |
| F(X3) | 428/21 | 0 | 0 | 5/21 | **-11/3** | 0 | 11/3+M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x5 в план 3 войдет переменная x4.  
Строка, соответствующая переменной x4 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=1/6. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x4 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x4 и столбец x4. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 510/21-(92/21 • -1/6):1/6 | 1-(0 • -1/6):1/6 | 0-(0 • -1/6):1/6 | 1/21-(17/21 • -1/6):1/6 | -1/6-(1/6 • -1/6):1/6 | 0-(1 • -1/6):1/6 | 1/6-(-1/6 • -1/6):1/6 |
| 41/21-(92/21 • -1/6):1/6 | 0-(0 • -1/6):1/6 | 1-(0 • -1/6):1/6 | -2/21-(17/21 • -1/6):1/6 | -1/6-(1/6 • -1/6):1/6 | 0-(1 • -1/6):1/6 | 1/6-(-1/6 • -1/6):1/6 |
| 92/21 : 1/6 | 0 : 1/6 | 0 : 1/6 | 17/21 : 1/6 | 1/6 : 1/6 | 1 : 1/6 | -1/6 : 1/6 |
| (11/3+M)-(92/21• (-11/3)):1/6 | (0)-(0 • (-11/3)):1/6 | (0)-(0 • (-11/3)):1/6 | (5/21)-(17/21• (-11/3)):1/6 | (-11/3)-(1/6 • (-11/3)):1/6 | (0)-(1 • (-11/3)):1/6 | (11/3+M)-(-1/6 • (-11/3)):1/6 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 144/7 | 1 | 0 | 6/7 | 0 | 1 | 0 |
| x2 | 131/7 | 0 | 1 | 5/7 | 0 | 1 | 0 |
| x4 | 544/7 | 0 | 0 | 46/7 | 1 | 6 | -1 |
| F(X3) | 1151/7 | 0 | 0 | 65/7 | 0 | 8 | M |

**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.  
Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 144/7 | 1 | 0 | 6/7 | 0 | 1 | 0 |
| x2 | 131/7 | 0 | 1 | 5/7 | 0 | 1 | 0 |
| x4 | 544/7 | 0 | 0 | 46/7 | 1 | 6 | -1 |
| F(X4) | 1151/7 | 0 | 0 | 65/7 | 0 | 8 | M |

Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым.  
Оптимальный план можно записать так:  
x1 = 144/7, x2 = 131/7  
F(X) = 7•144/7 + 1•131/7 = 1151/7